Branislav Boričić

DOI:10.2298/EKA0772007B

LOGIČKO I ISTORIJSKO ODREĐENJE TEOREMA NEMOGUĆNOSTI EROUA I SENA

LOGICAL AND HISTORICAL DETERMINATION OF THE ARROW AND SEN IMPOSSIBILITY THEOREMS

APSTRAKT: *Opšta klasifikacija deli matematička tvrđenja na univerzalna, oblika $\forall xA$, i egzistencijalna, $\exists xA$. Uobičajene formulacije teorema nemogućnosti K. J. Eroua i A. K. Sena, po svojoj formi, predstavljaju tvrđenja oblika: 'ne postoji x takav da važi A'. Imajući u vidu logičku ekvivalentnost formula $\neg\exists xA$ i $\forall x\neg A$, nalazimo da korpus teorema nemogućnosti, koji se pojavljuje u teoriji društvenog izbora, može činiti jednu specifičnu i prepoznatljivu potklasu univerzalnih tvrđenja. U ovom radu, na bazi ustanovljenog logičkog i metodološkog kriterijuma, ukazujemo na niz značajnih 'teorema nemogućnosti', kroz istoriju matematike, koji seže do naših dana i slavnih rezultata Eroua i Sena u oblasti matematičke ekonomije. Rad zaključujemo preciziranjem konteksta u kojem je moguće korektno formulisati rezultate Eroua i Sena, kao i prezentiranjem jednog neposrednog dokaza Senovog rezultata, bez oslanjanja na pojam minimalnog liberalizma.*

KLJUČNE REČI: *teorema nemogućnosti, (ne)protivrečnost*

ABSTRACT: *General classification of mathematical statements divides them into universal, those of the form $\forall xA$, and existential $\exists xA$ ones. Common formulations of impossibility theorems of K. J. Arrow and A. K. Sen are represented by the statements of the form 'there is no x such that A'. Bearing in mind logical equivalence of formulae $\neg\exists xA$ and $\forall x\neg A$, we come to the conclusion that the corpus of impossibility theorems, which appears in the theory of social choice, could make a specific and recognizable subclass of universal statements. In this paper, on the basis of the established logical and methodological criteria, we point to a sequence of extremely significant 'impossibility theorems', reaching throughout the history of mathematics to the present days and the famous results of Arrow and Sen in field of mathematical economics. We close with specifying the context which makes it possible to formulate the results of Arrow and Sen accurately, presenting a new direct proof of Sen's result, with no reliance on the notion of minimal liberalism.*

KEY WORDS: *impossibility theorem, (in)consistency*

Klasifikacija prema JEL: D70, D71, I31

1. Uvod

Dobitnici Nobelove nagrade za ekonomiju za 1972. i 1998. godinu su matematičari Erou[1] i Sen[2], a ona zajednička matematičko–metodološka crta njihovog rada, kojom ćemo se ovde baviti, u vezi je sa korpusom teorema nemogućnosti (*impossibility theorems*) u teoriji društvenog izbora. Pomenute nagrade su svakako doprinele većem interesovanju šireg kruga istraživača iz domena matematičke ekonomije za datu temu, kao i samoj popularizaciji ove teme. Cilj ovog članka je da ukaže na jednu, ipak, veoma dugu, tradiciju rezultata o nemogućnosti kroz istoriju matematike i da u taj širi kontekst smesti i rezultate Eroua i Sena, kao i da čitaocu, kroz pristupačne i poznate primere, približi duh rezultata ove vrste. Takođe ćemo, uz jasan logički i metodološki kriterijum, teoremama nemogućnosti definisati mesto u svekolikoj raznovrsnosti matematičkih tvrđenja.

Sa logičkog stanovišta, svaka teorema nemogućnosti predstavlja svedočenje o *protivrečnosti* određenih uslova. Matematička praksa protivrečnost uslova svodi na činjenicu o *nepostojanju* objekta koji bi zadovoljavao date uslove. Na primer, uslovi $x + y = 2$ i $2x + 2y = 2$, pošto iz njih sledi $1 = 2$, predstavljaju protivrečan sistem uslova (jednačina) za brojeve x i y. Slično, konstruisati trougao (u euklidskoj geometriji) sa stranicama $a = 2$, $b = 3$ i $c = 6$ nije moguće, jer nije zadovoljena nejednakost trougla $a + b > c$ kao nužan uslov za mogućnost konstrukcije, što dalje znači da je skup postavljenih uslova, koji se odnosi na dužine stranica trougla, protivrečan. Zaključujemo da, u prvom slučaju, ne postoji uređen par (x, y) koji bi zadovoljavao postavljene uslove, kao i da, u drugom slučaju, ne postoji trougao zadatih dužina stranica.

Formalno, nasuprot teoremema nemogućnosti nalaze se tvrđenja egzistencijalnog karaktera, 'teoreme mogućnosti', ne manje važna u matematičkoj teoriji, kojima se garantuje egzistencija određenog matematičkog objekta. Na primer, Prva Bolcano–Košijeva teorema[3] tvrdi da *ako je funkcija* f *neprekidna na intervalu* $[a, b]$ *i* $f(a)f(b) < 0$, *onda* $(\exists c \in (a, b))\ f(c) = 0$. Drugim rečima, pod datim uslovima, garantuje se egzistencija rešenja jednačine $f(x) = 0$ u posmatranom intervalu. Ipak, domi-

[1] K. J. Arrow (1921–), američki matematičar i ekonomista.
[2] A. K. Sen (1933–), američki matematičar i ekonomista indijskog porekla.
[3] B. Bolzano (1781–1848), češki filozof i matematičar. A. L. Cauchy (1789–1857), francuski matematičar.

nantnu klasu tvrđenja u matematičkoj ekonomiji predstavljaju tvrđenja egzistencijalnog karaktera kojim se ustanovljuje postojanje određenih fundamentalnih matematičkih objekata, kao što su opšta i konkurentska ravnoteža[4], funkcija korisnosti[5], nepokretna tačka[6] itd. Dakle, sa logičkog stanovišta, svaka teorema mogućnosti predstavlja svedočenje o *neprotivrečnosti* posmatranih uslova, a matematička praksa neprotivrečnost uslova svodi na činjenicu o *postojanju* objekta koji bi zadovoljavao date uslove. Ova konstatacija, kao i analogno tvrđenje prethodno izrečeno o teoremema nemogućnosti, predstavlja sažetak osnovnog polazišta teorije modela prema kojem je neka teorija neprotivrečna ukoliko ista ima bar jedan model.

Zaključujući ovo uvodno razmatranje, ističemo još i da, u generalnoj podeli tvrđenja na univerzalna, oblika $\forall x A(x)$, i egzistencijalna, oblika $\exists x A(x)$, imajući u vidu međusobnu logičku ekvivalentnost sledećih formula $\neg\exists x A(x)$ i $\forall x \neg A(x)$, teoreme nemogućnosti, koje su oblika $\neg\exists x A(x)$, svakako čine jednu specifičnu klasu univerzalnih tvrđenja. Štaviše, forma negativnog tvrđenja $\neg A$, po sebi, sugeriše i jedan od mogućih puteva argumentacije, metod svođenja na protivrečnost (*reductio ad absudrum*), što se često i čini: dokazuje se da je samo tvđenje A protivrečno, tj. da važi $A \to \perp$, a to je logički ekvivalentno tvrđenju $\neg A$.

Dakle, tri su osnovna koncepta koji se prepliću u ovom radu: logičko–metodološki, zasnovan na [D. Bonavec, 2003], [B. Boričić, 1986, 1993, 1995], [C. C. Chang, H. J. Keisler, 1973] i [I. Lakatos, 1963], istorijski, za koji kao posebno relevantne izvore smatramo [W. S. Anglin, 1994], [N. Artemidiadis, 2004], [C. B. Boyer, 1968] i [Đ. Kurepa, 1969], i matematičko–ekonomski, i to onaj deo koji se odnosi na teoriju društvenog izbora [K. J. Arrow, 1951, 1963, 1982], [I. Ekeland, 1979], [P. C. Fishburn, 1970, 1973], [N. Schofield, 1985, 2003], [A. K. Sen, 1973, 1995a, 1995b], [A. D. Taylor, 1995] i [B. Boričić, 1986, 1993, 2004, 2005].

---

[4] Erou i Debre (G. Debreu (1921–), američki matematičar i dobitnik Nobelove nagrade za ekonomiju 1983. godine).

[5] Debre.

[6] Kantorovič (L. Kantorovič (1912–1986), sovjetski matematičar i dobitnik Nobelove nagrade za ekonomiju 1975. godine) i Kakutani (I. Kakutani (1911–), japanski matematičar).

2. Teoreme nemogućnosti — kratko kroz istoriju

U istoriji matematike, kao prva u nizu slavnih teorema nemogućnosti je pitagorejska spoznaja o *nesamerljivosti stranice i dijagonale kvadrata*, odnosno o iracionalnosti broja $\sqrt{2}$ koji se dobija, pomoću Pitagorine teoreme, kao mera dužine dijagonale kvadrata jedinične stranice. Za ovu spoznaju je vezan niz istorijskih kontroverzi, od one o masovnom samoubistvu članova pitagorejskog bratstva, do one da se u predmetnom dokazu po prvi put u istoriji logike primenjuje jedan metod posrednog zaključivanja — metod svođenja na protivrečnost (*reductio ad absurdum*). Dakle, u vreme kada je otkrivena činjenica o iracionalnosti broja $\sqrt{2}$, mogla je biti formulisana i shvaćena samo kao tvrđenje da ne postoji broj koji bi bio mera dužine dijagonale kvadrata jedinične stranice, jer horizonti pitagorejaca su dosezali samo do proporcija, odnosno brojeva koje danas nazivamo racionalnim. Ovaj 'incident' je imao za posledicu i tzv. *prvu krizu* u istoriji razvoja matematike.

Verovatno bi u svakom nizanju istorijski značajnih teorema nemogućnosti, rešenja tri slavna antička problema, rešenje problema kvadrature kruga, problema trisekcije ugla i problema duplikacije kuba, našla svoje mesto. Sva tri čisto geometrijski definisana problema, u vezi sa elementarnim konstrukcijama geometrijskih objekata sredstvima 'ograničene moći', lenjirom i šestarom, dobijaju svoje razjašnjenje i konačno rešenje tek sponom koju će uspostaviti analitička geometrija između sintetičke geometrije, s jedne, i analize i algebre, s druge strane, a koja je omogućena prethodnim Dekartovim[7] uvođenjem pravouglog koordinatnog sistema. Ovi problemi su postali slavni upravo zbog činjenice da su njihova rešenja, ipak neočekivano, što moramo ovde naglasiti, dobijena u formi teorema nemogućnosti. Radi boljeg razumevanja materije ističemo da pomenuta veza između sintetičke geometrije i algebre omogućuje da se problem elementarnih konstrukcija, izvodljivih isključivo lenjirom i šestarom, sagleda kao algebarski ekvivalent konačnog broja primena osnovnih algebarskih operacija i operacije kvadratnog korena nad brojem 1.

Nemogućnost pozitivnog rešenja problema kvadrature kruga[8] će uslediti

[7] R. Descartes (1596–1650), francuski filozof i matematičar.

[8] Čak se i u našem jeziku danas kolokvijalno koristi pojam kvadrature kruga kao metafora za nešto uzaludno i nerešivo.

nakon Lindemanovog[9] dokaza transcendentalnosti broja π 1882. godine. Drugim rečima, *konstrukcija kvadrata površine jednake površini unapred zadatog kruga je nemoguća.*

Problem trisekcije ugla jeste kako definisati proceduru, koristeći, dakle, opet samo lenjir i šestar, deljenja proizvoljnog ugla na tri jednaka dela, poput one kojom konstruišemo simetralu proizvoljnog ugla i ugao delimo na dva jednaka dela. Demonstriraćemo osnovne elemente rešenja ovog problema. Iz mogućnosti izražavanja trostrukog ugla preko trigonometrijskih funkcija kao

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

dobija se jednačina trećeg stepena

$$4x^3 - 3x - a = 0$$

za koju se može pokazati da joj se rešenja, za proizvoljnu vrednost broja a, ne mogu izraziti u funkciji koeficijenata dobijene jednačine pomoću osnovnih algebarskih operacija i kvadratnog korena. Stoga, *trisekcija (proizvoljnog) ugla je nemoguća.*

Slično, problem udvostručenja zapremine kocke[10] se takođe svodi na problem rešivosti jedne algebarske jednačine trećeg stepena

$$x^3 - 2 = 0$$

čije se realno rešenje, kao i u slučaju jednačine povezane sa trisekcijom ugla, ne može izraziti preko osnovnih algebarskih operacija i kvadratnog korena, što ima za posledicu *nemogućnost konstrukcije stranice kocke čija bi zapremina bila dvostruko veća od zapremine unapred zadate kocke.*

Nemogućnost tricekcije ugla, kao i nemogućnost duplikacije kuba, dokazao je P. Vancel[11] 1837. godine. Oba ova tvrđenja se mogu obrazložiti pomoću

---

[9] C. L. F. Lindemann (1852–1939), nemački matematičar.

[10] Ovaj problem je u literaturi poznat i kao *delski problem* i vezuje se za jedan antički mit, prema kojem je, po savetu Pitije, radi dobijanja naklonosti Apolona, bilo potrebno, u Apolonovom hramu na egejskom ostrvu Delu, zameniti postojeći mermerni oltar oblika kocke oltarom istog oblika, ali dvostruko veće zapremine.

[11] P. L. Wantzel (1814–1848), francuski matematičar.

jednog opštijeg algebarskog rezultata prema kojem *ukoliko neka kubna jednačina sa racionalnim koeficijentima nema rešenja u skupu racionalnih brojeva, onda se njena rešenja ne mogu konstruisati elementarnim sredstvima, tj. lenjirom i šestarom.*

U istu klasu tvrđenja spada i otkriće neeuklidskih geometrija koje bi se moglo temeljiti na stavu da *nije moguće dokazati Euklidov postulat o paralelama.*

Niz otvorenih matematičkih problema sa kojim se ušlo u XX vek, a koji su pre svega predstavljeni u čuvenom Hilbertovom[12] izlaganju na Drugom međunarodnom kongresu matematičara 1900. godine u Parizu, doneo je i neka rešenja u formi teoreme nemogućnosti. Među tvrđenjima koja su imala najviše odjeka u naučnoj (i široj intelektualnoj, pa čak i umetničkoj[13]) javnosti svakako su Gedelove[14] teoreme nepotpunosti. Na pitanje o moći aksiomatskog metoda, Gedelova je konstatacija da čak ni ona najjednostavnija matematička znanja, u koja spada teorija brojeva, dakle, deo matematike koji se odnosi samo na prirodne brojeve i njihova svojstva, *nije moguće u potpunosti aksiomatski opisati.* Ovakvo jedno saznanje ima dalekosežne posledice i na sagledavanje problema neprotivrečnosti jedne matematičke teorije. Naime, *tvrđenje o neprotivrečnosti jedne teorije nije moguće dokazati u samoj toj teoriji.*

3. Teoreme nemogućnosti Eroua i Sena

U ovom delu rada ćemo precizno definisati kontekst i dati formulaciju teoreme Eroua, a potom precizirati i Senov paradoks liberala, kao primer teoreme nemogućnosti koji pleni svojom jednostavnošću i elegancijom i koji, stoga, nalazi mesta i u osnovnim nastavnim programima mikroekonomije. Polazište teorije društvenog izbora predstavlja logika preferencija[15]. Radi se, zapravo, o varijacijama logičkih sistema koje, polazeći od odabranih

[12]D. Hilbert (1862–1943), jedan od najvećih matematičara XX veka.
[13]D. R. Hofstadter, **Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid**, Basic Books, 1979, knjiga koja je dobila Pulicerovu nagradu 1980. godine.
[14]K. Gödel (1906–1978), jedan od najvećih logičara XX veka.
[15]Prvi formalni koncept logike preferencija potiče od fon Rajta (v. [G. H. von Wright, 1963]) (G. H. von Wright (1916–2003), engleski logičar finskog porekla.)

principa, predstavljaju formalizovani odraz odgovarajućeg koncepta preferencije. Osnovni među njima se zasnivaju na: *relaciji slabe preferencije*[16], *relaciji stroge preferencije*[17] i *relaciji indiferencije*[18].

Jasno je da nijedna relacija slabe preferencije ne može biti, u isto vreme, i relacija stroge preferencije, a ne može se desiti ni obrnuto. Pored toga, kako se svojstva simetrije i asimetrije međusobno isključuju, to nijedna relacija indiferencije neće biti relacija stroge preferencije, niti obrnuto.

Može se dokazati da *ako je R relacija slabe preferencije, onda je relacija $E_R =_{def} R \cap R^{-1}$ jedna relacija indiferencije, $P_R =_{def} R \cap \overline{R^{-1}}$ jedna relacija stroge preferencije i važi $E_R \cup P_R = R$,* gde je sa $\overline{R}$ označen komplement relacije R, a sa R^{-1} njena inverzna relacija. Za relacije E_R i P_R definisane na ovaj način, posredstvom relacije slabe preferencije R, kaže se još da su *generisane relacijom R.*

Interes grupe individua, odnosno društveni interes, mora se posmatrati kao rezultat pojedinačnih interesa i preferencija svake od individua koja pripada posmatranoj grupi. Polazeći od toga da pojedinačni interesi nisu istovetni, štaviše, često su međusobno suprotstavljeni, nije jednostavno definisati društveni interes. Polazeći čak i od hipoteze da individualne preferencije zadovoljavaju određene uslove, poput onih koje smo razmotrili govoreći o bazičnim principima logike preferencija, opet se, u opštem slučaju, nailazi na nepremostive teškoće[19].

[16]Za relaciju slabe preferencije R pretpostavlja se da je najmanje *refleksivna:* $(\forall x)xRx$, *tranzitivna:* $\forall x\forall y\forall z(xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$ i *linearna* (ili *potpuna*): $\forall x\forall y(xRy \vee yRx)$. Ovi uslovi se, u teoriji društvenog izbora, nazivaju i *aksiomama racionalnog izbora.*

[17]Relacija stroge preferencije P zadovoljava, pored uslova tranzitivnosti, takođe i uslov *asimetrije*: $\forall x\forall y(xPy \rightarrow \neg yPx)$. Ponekad se pretpostavlja da relacija stroge preferencije zadovoljava i uslov *linearnosti,* koji se izražava formulom: $\forall x\forall y(xPy \vee x = y \vee yPx)$, što bi značilo da se svaka dva različita elementa međusobno mogu uporediti. Ovaj uslov se u literaturi često naziva i *slabom potpunošću.*

[18]Relaciju indiferencije I, uz refleksivnost, karakteriše uslov *simetrije:* $\forall x\forall y(xIy \rightarrow yIx)$.

[19]Jedna od, u literaturi prvi put registrovanih, takvih situacija bila je poznata još u XVIII veku i danas se navodi kao *Kondorseov paradoks* (M. J. A. N. C. de Condorcet (1743–1794), francuski filozof.), a evo, ukratko, o čemu

Naš osnovni problem je, dakle, da od ukupno n različitih individualnih relacija preferencije $(R_1, R_2, ..., R_n)$ dobijemo jednu jedinstvenu, takođe relaciju preferencije R, koja će, na adekvatan način, odražavati individualne preferencije.

Pretpostavke od kojih polazimo su sledeće:

Sa V ćemo označiti skup od n individua, a same individue iz tog skupa sa $i, j, ...$, dok ćemo moguća alternativna društvena stanja prema kojima date individue formiraju svoje preferencije označiti sa $x, y, z, ...$ i skup svih ovih alternativa sa X. Slaba relacija preferencije koja odgovara pojedincu i biće R_i, a rezultirajući društveni interes biće označen sa R. Podrazumeva se, dakle, da relacija R_i, za svaki $i \in V$, zadovoljava aksiome racionalnog izbora što bi, dalje, prirodno, uslovilo zadovoljenje istih aksioma i od strane rezultirajuće relacije R.

Sa P_i i I_i, odnosno sa P i I, označavamo relacije stroge preferencije generisane relacijom R_i, odnosno relacijom R, na sledeći način: $P_i = R_i \cap \overline{R_i^{-1}}$, $I_i = R_i \cap R_i^{-1}$, $P = R \cap \overline{R^{-1}}$ i $I = R \cap R^{-1}$.

Ostale aksiome koje određuju vrednosni sadržaj ovakvog pristupa analizi procesa društvenog odlučivanja su sledeće:

U *(neograničeni domen): Procedura generisanja društvene preferencije se može primeniti na svaki mogući skup individualnih preferencija.*

P *(Paretov princip[20]):* $(\forall x, y \in X)((\forall i \in V)xP_iy \to xPy)$

IP *(nezavisnost od irelevantnih alternativa):* za sve $Y \subseteq X$,

$$(\forall x, y \in Y)(\forall i \in V)(xP_iy \leftrightarrow xP_i'y) \to (\forall x, y \in Y)(xPy \leftrightarrow xP'y)$$

---

se radi: pretpostavimo da neka grupa koja se sastoji od tri ravnopravne individue a, b i c treba da izvrši izbor imeđu tri moguće alternative X, Y i Z. Neka individua a preferira alternativu X u odnosu na Y i alternativu Y u odnosu na Z, a ovo, prirodno, ima za posledicu da je alternativa X takođe preferirana i u odnosu na alternativu Z, što bi se, zajedno, moglo označiti sa $X >_a Y >_a Z$. Slično, neka je: $Y >_b Z >_b X$ i $Z >_c X >_c Y$. Tada se nužno dolazi do ciklične strukture u kojoj je nemoguće navesti prihvatljive argumente na osnovu kojih bi se, ipak, jednoj od navedenih alternativa mogla dati prednost u odnosu na ostale dve.

[20]V. Pareto (1848–1923), italijanski ekonomista.

ND *(nediktatorstvo):* $\neg(\exists i \in V)(\forall x, y \in X)(xP_iy \rightarrow xPy)$

Prokomentarišimo poslednje četiri aksiome. Pretpostavka **U** o neograničenom domenu osigurava prihvatljivost svih mogućih individualnih preferencija nad bilo kojim konačnim skupom alternativa. Paretovim principom **P** se izražava zahtev da u slučaju kada svaka individua strogo preferira alternativu x u odnosu na alternativu y, onda i društvo takođe preferira x u odnosu na y. Aksioma nezavisnosti od irelevantnih alternativa **IP** bi se mogla ovako parafrazirati: ako u proizvoljnim n–torkama pojedinačnih strogih preferencija svaka individua strogo preferira alternativu x u odnosu na alternativu y, onda su i rezultirajući društveni interesi takvi da alternativa x bude strogo preferirana u odnosu na y, bez obzira na to što se pojedinačne preferencije u odnosu na ostale alternative možda i razlikuju. Ukoliko diktatora definišemo kao individuu čije se stroge preferencije nužno prihvataju kao društvene preferencije, i to nezavisno od preferencija ostalih pojedinaca, onda uslov nediktatorstva **ND** tvrdi da diktator ne postoji.

Na ovaj način smo došli do konteksta u kojem je moguće iskazati prvo tvrđenje, *teoremu nemogućnosti Eroua* ili *paradoks Eroua*:

Teorema nemogućnosti. (K. Erou) *Nije moguće definisati proceduru koja će svakom nizu $R_1, R_2, ..., R_n$ individualnih relacija slabe preferencije pridruživati odgovarajuću društvenu relaciju slabe preferencije R, a da su pri tom zadovoljeni svi gore navedeni uslovi* **U**, **P**, **IP** *i* **ND**.

Dokaz teoreme, zbog njegove složenosti, izostavljamo, a čitaoca, pored originalnog izvora [K. Arrow, 1951], upućujemo i na izvore citirane u prvom delu ovog rada kao osnovu koncepta matematičke ekonomije na kojoj baziramo naše razmatranje. Ovom prilikom ukazujemo i na detaljnu, duboku i interesantnu logičku analizu dokaza Erouove teoreme u [R. Routley, 1979].

Kao drugi ilustrativni primer u ovom delu članka navodimo jedan od Senovih rezultata koji takođe pripada korpusu teorema nemogućnosti.

Inspirisan pojmom liberalizma, kako ga definiše Mil[21], Sen uvodi *aksiomu* **L** *liberalizma,* koju ćemo predstaviti u sledećem obliku:

$$(\forall i \in V)(\exists x, y \in X)(x \neq y \rightarrow (xP_iy \rightarrow xPy) \wedge (yP_ix \rightarrow yPx))$$

[21] J. S. Mill (1806–1873), engleski filozof i logičar.

pod pretpostavkom da su P i P_i, redom, društvena i individualne aciklične[22] relacije stroge preferencije.

Čitaocu skrećemo pažnju na nekoliko zajedničkih formalnih elemenata aksioma **ND** i **L**. Samu aksiomu **L** bismo mogli 'tumačiti' kao zahtev da svakoj individui bar jednom, u odnosu na neke dve različite alternative, bude ispunjena želja u smislu da je ta želja prihvaćena i kao društevni interes. Drugim rečima, preferencije svake individue su, za bar dve različite alternative, odlučujuće.

Radi pojednostavljenja dokaza Sen prethodno uvodi aksiomu *minimalnog liberalizma* $\mathbf{L}^\star$ koju predstavljamo ovako:

$$(\exists j,k \in V)(\exists x,y,z,w \in X)((x,y) \neq (z,w) \wedge x \neq y \wedge z \neq w \to$$

$$\to (xP_jy \to xPy) \wedge (yP_jx \to yPx) \wedge (zP_kw \to zPw) \wedge (wP_kz \to wPz))$$

Očigledno, iz **L** sledi $\mathbf{L}^\star$, pa će iz protivrečnosti $\mathbf{L}^\star$ sa **P** i **U**, *a fortiori*, slediti i međusobna protivrečnost uslova **L**, **P** i **U**.

Aksiomu $\mathbf{L}^\star$ interpretiramo kao zahtev da su bar dve individue odlučujuće za bar dva različita para međusobno različitih alternativa. I iz ovakve interpretacije sledi da je uslov **L** dovoljan za $\mathbf{L}^\star$, ali ne i potreban.

Tvrđenje koje navodimo poznato je u literaturi kao *nemogućnost Paretovog liberala* ili kao *paradoks liberala*:

Teorema nemogućnosti. (A. Sen) *Uslovi* **U**, **P** *i* **L** *nisu konzistentni.*

Za dokaz je, dakle, dovoljno ustanoviti da su uslovi $\mathbf{L}^\star$ i **P** nesaglasni. Pretpostavimo li da parovi (x,y) i (z,w) imaju bar jedan zajednički element, na primer $x = z$, onda iz pretpostavki xP_ky, wP_jx i $(\forall i \in V)yP_iw$, prema $\mathbf{L}^\star$ i **P**, redom, izvodimo: xPy, wPx i yPw, što narušava uslov acikličnosti. Pretpostavimo li, međutim, da su sve četiri alternative x, y, z i w međusobno različite, onda iz pretpostavki xP_ky, zP_jw i $(\forall i \in V)(wP_ix \wedge yP_iz)$, prema $\mathbf{L}^\star$ i **P**, redom, izvodimo: $xPy \wedge zPw$ i $wPx \wedge yPw$, što, takođe, narušava uslov acikličnosti. Upravo prezentirani dokaz je zasnovan na originalnom Senovom dokazu [A. K. Sen, 1970, 1995a].

Ovom prilikom ćemo izvesti i jedan neposredan dokaz istog tvrđenja, koji ne koristi pomoćni pojam minimalnog liberalizma. Pretpostavimo da se

[22] Za binarnu relaciju P kažemo da je aciklična ako, za svaki prirodan broj $n \geq 2$, važi $\forall x_1 \ldots \forall x_n (x_1Px_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}Px_n \to x_1Rx_n)$.

skup V svih individua sastoji od ukupno $k(\geq 2)$ lica i da, za sve alternative $x_0, \ldots, x_k$ sledeći uslovi:

(1) $$x_{i-1} \neq x_i \wedge x_{i-1} P_{i-1} x_i$$

kao i posebni slučajevi aksiome liberalizma:

(2) $$x_{i-1} \neq x_i \wedge x_{i-1} P_{i-1} x_i \to x_{i-1} P x_i$$

važe, za sve $0 \leq i \leq k$. Takođe pretpostavimo da:

(3) $$x_k P_i x_0$$

važi, za sve $0 \leq i \leq k$. Iz (1) i (2), izvodimo $x_0 P x_1 \wedge x_1 P x_2 \wedge \cdots \wedge x_{k-1} P x_k$. S druge strane, iz (3), pomoću Paretovog pravila, izvodimo $x_k P x_0$, što narušava uslov acikličnosti relacije P.

4. Zaključna razmatranja

Teoreme nemogućnosti Eroua i Sena predstavljaju centralni rezultat teorije društvenog izbora. Potreba agregiranja preferencija javlja se u mnogim disciplinama, ali naročito je važna za ekonomiju blagostanja, gde se pokušava ustanoviti ekonomski rezultat koji bi bio opšte prihvatljiv i stabilan. U stvari, ovaj postupak je značajan kako u procesu donošenja odluka pojedinca, kada treba napraviti racionalni izbor zasnovan na nekoliko kriterijuma, tako i u sistemu glasanja, kada globalnu odluku treba definisati kao konzistentan rezultat višestrukih preferencija birača. Sa matematičkog stanovišta, na probleme agregiranja društvene preferencije iz konačnog skupa pojedinačnih preferencija prvi put se ukazuje, u XVIII veku, u radovima Kondorsea, kroz rezultat koji je danas poznat u literaturi kao *Kondorseov paradoks.* Kasnije, u drugoj polovini XX veka, radovi Eroua obogaćuju matematičku ekonomiju prvom teoremom nemogućnosti u teoriji društvenog izbora, dokazanu u jednom veoma složenom matematičkom kontekstu. Grubo govoreći, zaključak je da nema načina kojim bi se iz arbitrarnih individualnih preferencija, kada postoji više opcija, konstruisala konzistentna društvena preferencija koja zadovoljava racionalno definisane kriterijume. Negujući dalje ovakav pristup, sa željom da se rezultati ove vrste približe širem krugu ekonomista, Sen pruža sopstvenu interpretaciju postojećih rezultata i dobija nove, metodološki jednostavnije i didaktički pogodnije. Tako, na primer, *paradoks liberala,* definisan kao nemogucnost istovremenog zadovoljenja pretpostavljenih uslova, predstavlja takođe teoremu nemogućnosti. Preciznije, u sistemu međusobno nezavisnih pojedinačnih i društvenih opcija nemoguće je istovremeno imati liberalizam i optimalno Paretovo rešenje. Dakle, mehanizam slobodnog tržista, tj. zadovoljenje individualnih preferencija, nije dovoljan da proizvede optimalnost privrede, tj. najbolju opciju društva. Erou i Sen su za ove rezultate dobili Nobelove nagarde za ekonomiju.

U ovom radu, teoreme nemogućnosti, koje se, dakle, pod tim nazivom prvi put pojavljuju u kontekstu matematičke ekonomije, smeštamo, prema čvrstim logičkim i metodološkim kriterijumima, u jedan širi istorijski kontekst, ukazujući na niz matematičkih tvrđenja, još od antičkih vremena, sve do današnjih dana, koja, po svojoj prirodi, predstavljaju takođe primere 'teorema nemogućnosti'. Pri tom konstatujemo da se, kada su u pitanju tvrđenja ovog tipa, uvek radilo o kolosalnim rezultatima koji su menjali tok razvoja matematike i, po pravilu, zahtevali redefinisanje osnovne filozofske platforme matematike.

Naše izlaganje zaključujemo preciziranjem kontekksta u kojem je moguće korektno formulisati rezultate Eroua i Sena, i navođenjem jednog neposrednog dokaza Senovog rezultata, bez oslanjanja na pojam minimalnog liberalizma.

LITERATURA

Anglin, W. S. (1994), *Mathematics: A Concise History and Philosophy*, Springer-Verlag, Berlin.

Artemidiadis, N. (2004), *History of Mathematics*, American Mathematical Society, Providence.

Arrow, K. J. (1951), "Mathematical models in the social sciences", in Lerner and Lasswell (eds.),

Policy Sciences. (v. takođe *Ekonomski anali* 165 (2005), str. 235-269.)

Arrow, K. J. (1963), *Social Choice and Individual Values*, John Wiley, New York.

Arrow, K. J.i Intriligator, M. D. (eds.) (1982), *Handbook of Mathematical Economics*, North-Holland, Amstredam.

Blaug, M. (1992), *The Methodology of Economics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Bonavec, D. (2003), *Deduction*, Blackwell Publishing, Malden.

Boričić B. i dr. (1986), *Savremena metodologija u teorijskoj ekonomiji*, Ekonomski fakultet, Beograd.

Boričić, B. (1993), *Elementi teorije sistema*, Ekonomski fakultet, Beograd. (v. Mathematical Reviews 94e:93001; Zentralblatt fur Mathematik 789.93001)

Boričić, B. (1995), *Logic and Proof*, (Greek) Zitis, Thessaloniki. (v. Mathematical Reviews 97c:03001; Zentralblatt fur Mathematik 838.03001)

Boričić, B. (2004), „Ekonomisti nobelovci - Amartya K. Sen", *Ekonomski anali* 160, str. 215-220.

Boričić, B. (2005), „Ekonomisti nobelovci - Kenneth Arrow", *Ekonomski anali* 165, str. 225-234.

Boyer, C. B. (1968), *A History of Mathematics*, J. Wiley and Sons, New York.

Chang, C. C., Keisler, H. J. (1973), *Model Theory*, North-Holland, Amsterdam.

Ekeland, I. (1979), *Elements d' economie mathematique*, Hermann, Paris.

Fishburn, P. C. (1970), *Utility Theory for Decision Making*, John Wiley, New York.

Fishburn, P. C. (1973), *The Theory of Social Choice*, Princeton University Press, Princeton.

Hands, D. W. (2001), *Reflection without Rules*, Cambridge University Press, Cambridge.

Kurepa, Đ. (1969), *Viša algebra I i II*, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd.

Lakatos, I. (1963), "Proofs nad Refutations", *The British Journal for the Philosophy of Science* XIV, pp. 1-25, 120-139, 221-245, 296-342. (Prevod: Školska knjiga, Zagreb, 1991.)

Routley, R. (1979), "Repairing proofs of Arrow's general impossibility theorem and enlarging the scope of the theorem", *Notre Dame Journal of Formal Logic* 20, pp. 879-890.

Schofield, N. (1985), *Social Choice and Democracy*, Springer, Berlin.

Schofield, N. (2003), *Mathematical Methods in Economics and Social Choice*, Springer, Berlin.

Sen, A. K. (1970), "The Impossibility of a Paretian Liberal", *Journal of Political Economy* 78 (1), pp. 152-157.

Sen, A. K. (1973), *On Economic Inequality*, Clarendon Press, Oxford. (Prevod: O ekonomskoj nejednakosti, Cekade, Zagreb, 1985.)

Sen, A. K. (1995a), *Collective Choice and Social Welfare*, Elsevier, Amsterdam. (Fourth impression)

Sen, A. K. (1995b), "Rationality and social choice", *American Economic Review.* (v. takođe *Ekonomski anali* 160 (2004), str. 221-253.)

Taylor, A. D. (1995), *Mathematics and Politics*, Springer, Berlin.

von Wright, G. H. (1963), *The Logic of Preference*, Edinburgh Univ. Press, Edinburgh.